Chapitre 10 : notion de fonction

Objectifs :

- Connaître le vocabulaire : fonction, antécédent, image, courbe, …
- Maîtriser les notations et définition propres à la notion de fonction.
- Savoir calculer une image à partir d'un antécédent d'une fonction donnée.
- Savoir déterminer graphiquement image et antécédent d'une fonction donnée.
- Associer la notion de fonction aux autres connaissances mathématiques.
- Savoir utiliser la notion de fonction pour des résolutions de problèmes.

Un peu de culture :

En mathématiques, on utilise beaucoup de symboles et de notations propres à la discipline…

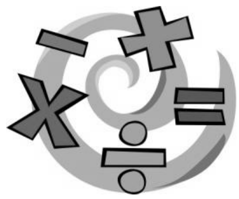
Vous connaissez : $= \; \neq \; \times \; + \; - \; - \; \approx \; < \; > \; \leq \; \geq \; \in \; \pi \; x^2 \; \sqrt{2} \; (AB) \; [AB] \; \widehat{ABC} \; AB \perp //$

Mais il en existe encore beaucoup d'autres : $f(x) \; u_n \; \infty \; \sim \; \equiv \; \forall \; \complement \; \partial \; \cup \; \cap \; \emptyset \; \Delta \; \nabla \; \exists \; \nexists$

$\exists! \; \rightarrow \; \frac{dy}{dx} \; \frac{\partial y}{\partial x} \; \frac{\delta y}{\delta x} \; \sqrt[3]{5} \; \sqrt[n]{3} \; \int \; \iint \; \iiint \; \oint \; \oiint \; \oiiint \; \sum \; \prod \; \bar{A} \; \vec{u} \; \varphi \; \lim$

$\Rightarrow \; \Leftrightarrow \; \mathbb{N} \; \mathbb{R} \; \mathbb{Q} \; \mathbb{Z}$ …

Le but n'est pas de tous les connaître cette année mais une question se pose : Qui les crée, et pourquoi ? Ils sont évidemment créer pour se simplifier la vie… Imaginons un instant une équation à poser puis à résoudre sans aucun symbole (exemple :trois choses auquel on ajoute cinq sont égales à cinq fois cette chose auquel j'enlève deux), une horreur ! Et il ne s'agit que d'une petite équation… Donc les symboles sont créés pour simplifier la démarche de chacun pour peu qu'on connaisse tous les mêmes avec la même signification et tout ira bien… C'est un principe identique pour tous les langages.
Mais qui les crée ? Et bien au cours de l'histoire, de temps en temps, un mathématicien ou autre écrivait un article ou un livre dans lequel il se simplifiait la vie… Cet écrit est ensuite repris par d'autres (parfois des centaines d'années après) qui peu à peu adopte les notations qu'ils lisent.



Et évidemment, les symboles que l'on utilise actuellement de manière naturelle n'ont pas toujours existé. Ils sont apparus en général entre le XV$^{\text{ème}}$ et le XVIII$^{\text{ème}}$ siècle.

Quelques exemples :

$=$ par Recorde (Anglais, 1510-1558) en 1557

$+$ et $-$ par Widmann (Allemand, vers 1460)

ab au lieu de $a \times b$ par Stifel (1486-1567) en 1544

$\frac{a}{b}$ par Oresme (Français, 1325-1382)

( )parTartaglia (1506-1557)

$<$ et $>$ par Thomas Harriot (Anglais) en 1621

$\times$ par Oughtred en 1631 (croix de St André)

: Leibniz (Allemand, 1646-1716) en 1698

$\sqrt{\ }$ Descartes en 1637 puis Oughtred en 1647

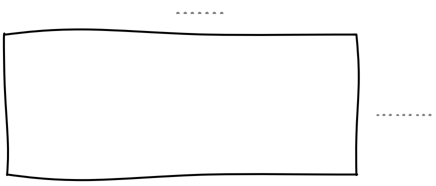
[ ] par Bombelli (1526-1573)

Et encore nous n'avons pas abordé les évolutions des notations et les chiffres…

1°) Notations et vocabulaire

Avec une ficelle de longueur 10 cm, on fabrique un rectangle.
On désigne par x la longueur d'un côté de ce rectangle.

Exprimons en fonction de x l'aire du rectangle.



On a : $\mathcal{P}$= ………………………………………………………………………

Donc es dimensions du rectangle sont donc : ………………………

Ainsi l'aire du rectangle s'exprime par la formule $A =$ …………………

Développons A. $A =$ ………………………………………………

On cherche la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle est la plus grande possible.
Complétons donc un tableau de valeurs pour conjecturer.

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Aire								

L'aire maximum semble être égal à ……………………………………………………

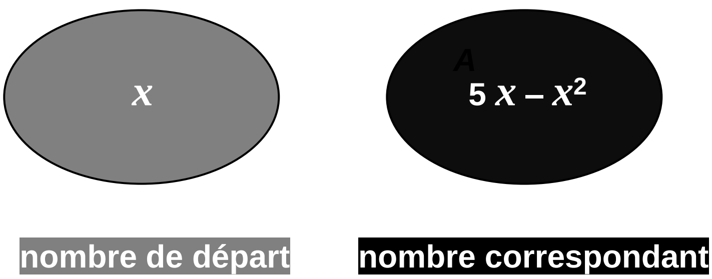
Pour chaque nombre x, on a fait correspondre un nombre égal à l'aire du rectangle.
Par exemple : **1** $\mapsto$
2 $\mapsto$
Pour l'aire qui semble maximum, on a trouvé :

De façon générale, on note :

$A : x \mapsto 5x - x^2$

$x \mapsto 5x - x^2$ se lit « à x on associe $5x - x^2$ »

***A* est appelée une <u>fonction</u>.**



C'est une « machine » mathématique qui, à un nombre donné, fait correspondre un autre nombre.

L'expression *A* dépend de la valeur de x et varie en fonction de x. **x est appelée la <u>variable</u>.**

On note ainsi : **$A(x) = 5x - x^2$** **$A(x)$** se lit « ***A* de x**».

<u>Exemples :</u> $A(\quad) =$ $A(\quad) =$ $A(\quad) =$ $A(\quad) =$

On dit que :

- l'**image** de par la fonction A est .
- est un **antécédent** de par A.

$\mapsto$

Antécédent de

Image de

Remarques :

- Un nombre possède une unique image.
- Cependant, un nombre peut posséder plusieurs antécédents. Par exemple : les antécédents de 5,25 sont 1,5 et 3,5 (voir tableau).

Exemple :

À l'aide de la calculatrice on s'intéresse à la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$

1) Compléter le tableau de valeurs :

x	4	10,24	16	20,25
Erreur ! Signet non défini.				

2) Compléter alors : a) L'image de 4 par f est …… b) Un antécédent de 4 par f est ……

c) f : …… $\mapsto$ 3,2 d) f(20,25) = ……

3) Calculer f(4,41) et f(1310,44)

……

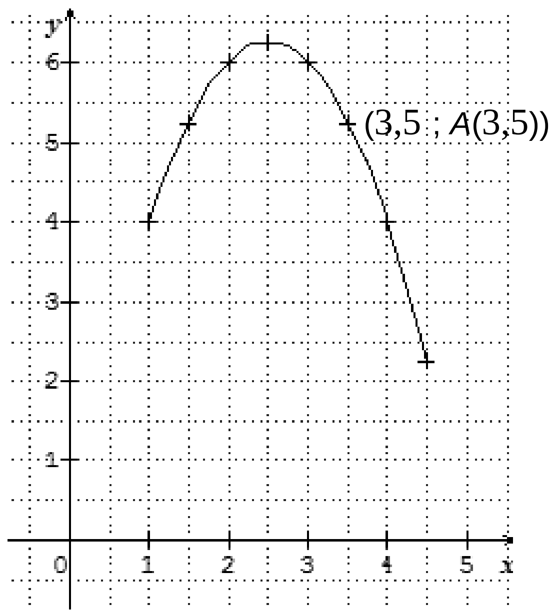
2°) Représentation graphique d'une fonction

Représenter les données du tableau de valeurs du paragraphe 1°) dans un repère tel qu'on trouve en abscisse (horizontal) la longueur du côté du rectangle et en ordonnée (vertical) son aire correspondante.

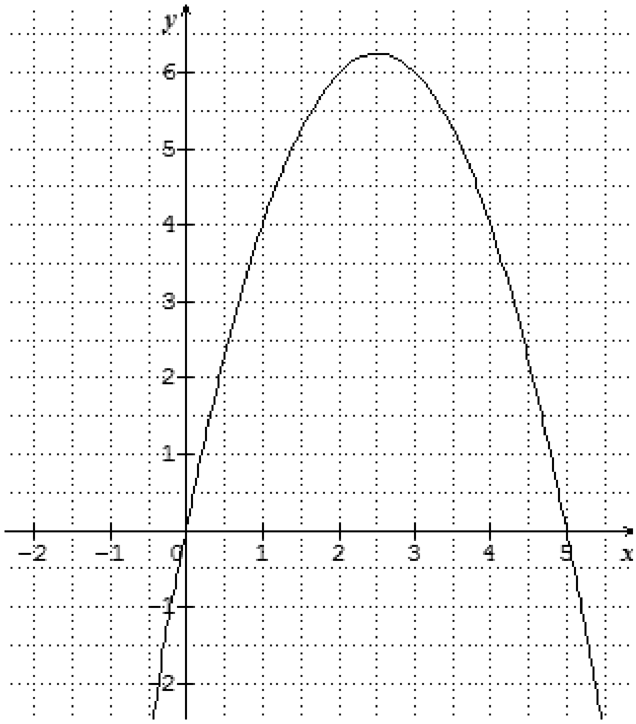
En reliant les points, on obtient **une courbe C**.

Tout point de la courbe C possède donc des coordonnées de la forme (x ; A(x)).

exemple



À l'aide d'un logiciel comme ***sinequanon*** ou ***<u>GeoGebra</u> ou Excel*** on peut saisir directement l'expression de la fonction A. Dans la barre de saisie, on écriera : a(x)=5x-x^2



La courbe représentative de la fonction *A* dépasse les limites du problème.
En effet, l'expression de la fonction *A* accepte par exemple des valeurs négatives de x, ce que les données du problème rejettent puisque x représente une longueur !

<u>Répondre graphiquement aux questions suivantes :</u>

1) Donner un ordre de grandeur de l'aire du rectangle si un de ces côtés mesure 0,5 cm ?

……………………………

2) Qu'en est-il si un de ses côtés mesure 5 cm ?

……………………………………………………………………………………………

3) Donner les dimensions d'un rectangle dont l'aire est environ égale à 1 cm^2.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

4) Quelle semble être la nature du rectangle dont l'aire est maximum ?

……………………………………………………………………………………………